



TITLE:

発展方程式の特異摂動と退化 (「近似理論の研究」報告集)

AUTHOR(S):

田辺, 広城

CITATION:

田辺, 広城. 発展方程式の特異摂動と退化 (「近似理論の研究」報告集).
数理解析研究所講究録 1968, 36: 49-58

ISSUE DATE:

1968-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107593>

RIGHT:

発展方程式の特異擾動と退化

田辺 玄成

パラメーター $\varepsilon \geq 0$ を含む発展方程式

$$(1\varepsilon) \quad du_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)$$

ある u は

$$(2\varepsilon) \quad \varepsilon du_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)$$

について考える、種々の条件のもとで $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの解 $u_\varepsilon(t)$ の収束を調べるのであるが $A_0(t)$ は一般に $A_\varepsilon(t)$ ($\varepsilon > 0$) よりも弱い作用素すなわち定義域に関して $D(A_0(t)) \supset D(A_\varepsilon(t))$ が満たされている場合を主に考える。 $A_\varepsilon(t)$ は通常微分作用素で定められるものであるが抽象論の枠内で特異擾動や退化を論じても微分作用素の代数的構造や随特性曲線に関する微細な結果を得ることは一般に至難である、従って抽象的方程式のかかる擾動を論ずることに疑問が持たれるかも知れないが無意味であるとも思われないので少し考察してみることにする、主として (1ε) , (2ε) の解が南雲先生の論文 [4] の意味で完全に安定 (completely stable) である条件を求めるのであるが、一般的な形に種々の定理を証明することは容易であろうがそれにあてはまる例を調べるのかかなり困難である、そこで人工的ではあるが trivial な例を含む定理を述べ、次に加藤敏夫教授の最近の結果を紹介することにする。

準備として発展方程式

$$(3) \quad du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t)$$

の初期値問題の可解性についての一定理を次に述べておく。

(I) $A(t)$ は一様に解析的半群を生成する. すなわち各 $t \in [0, T]$ に対して $A(t)$ の resolvent $R_{A(t)} \lambda$ は一つの決まった開角領域 $\Sigma = \{\lambda : \arg \lambda \notin (-\theta_0, \theta_0)\}$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) を含む. 各 $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Sigma$ に対して $\|(\lambda - A(t))^{-1}\| \leq M/|\lambda|$ が成立する様な M が存在する.

(II) $A(t)^{-1}$ はノルム位相に関して t につき連続微分可能である.

(III) 正の数 $p \leq 1$ が存在し $R(dA(t)^{-1}/dt)$ ($= dA(t)^{-1}/dt$ の値域) $\subset D(A(t)^p)$ かつ有限な数 N が存在して $0 \leq t \leq T$ で

$$\|A(t)^p \cdot dA(t)^{-1}/dt\| \leq N.$$

以上の仮定のもとで (3) の基本解 $U(t, s)$ が存在する. $U(t, s)$ は $0 \leq s \leq t$ で定義された有界作用素の値をとる関数で

$$(4) \quad U(s, s) = I, \quad 0 \leq s \leq T,$$

$s < t$ のとき $R(U(t, s)) \subset D(A(t))$, t について $U(t, s)$ は微分可能で

$$(5) \quad \partial U(t, s) / \partial t + A(t) U(t, s) = 0$$

$$(6) \quad \|\partial U(t, s) / \partial t\| = \|A(t) U(t, s)\| \leq C/(t-s).$$

$f(t)$ が $1+t$ 階連続ならば

$$(7) \quad u(t) = U(t, s)u + \int_s^t U(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma$$

が初期条件 $u(s) = u$ を満足する $s < t \leq T$ での (3) の唯一つの解である.

証明の概略 Γ を Σ の中で $\infty e^{-i\theta_0}$ と $\infty e^{i\theta_0}$ を結ぶ滑らかな路とすると

$$(8) \quad \exp(-\sigma A(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda \sigma} (\lambda - A(t))^{-1} d\lambda \quad (\sigma > 0)$$

が $A(t)$ の生成する半群である. $\lambda \in \Sigma$ のとき

$$\begin{aligned} \partial(\lambda - A(t))^{-1} / \partial t &= -A(t)(\lambda - A(t))^{-1} \cdot \partial A(t) / \partial t \cdot A(t)(\lambda - A(t))^{-1} \\ (9) \quad &= -A(t)^{p-1-p}(\lambda - A(t))^{-1} \cdot A(t)^p \partial A(t) / \partial t \cdot A(t)(\lambda - A(t))^{-1} \end{aligned}$$

に注意すると (III) より

$$(10) \quad \|\partial(\lambda - A(t))^{-1} / \partial t\| \leq C / (t-s)^p$$

を得る. 以下 C は種々の 数を表わす.

$$(11) \quad R_1(t, s) = -(\partial / \partial t + \partial / \partial s) \exp(-(t-s)A(t))$$

と書く

$$(12) \quad \|R_1(t, s)\| \leq C / (t-s)^{1-p}$$

が (8) と (10) から得られる. この R_1 から出発して次々に

$$(13) \quad R_m(t, s) = \int_s^t R_1(t, \tau) R_{m-1}(\tau, s) d\tau, \quad m=2, 3, \dots$$

と定義して

$$(14) \quad R(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t, s)$$

$$(15) \quad W(t, s) = \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(t)) R(\tau, s) d\tau$$

とすると

$$(16) \quad U(t, s) = \exp(-(t-s)A(t)) + W(t, s)$$

が求める基本解である.

§1. (12) に関する所要擾動

定理2. $A_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$, $\varepsilon > 0$ に対して定理1の仮定が一樣に満足さ

れているとする. すなわち (I), (II), (III) が ε に無関係な θ_0, ρ, N, M

によって満足されているとする. 次に $\varepsilon \downarrow 0$ ある n は $\varepsilon \downarrow 0$ のときに強位

相て一樣に

$$(a) \quad \exp(-\delta A_0(t)) \rightarrow I, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(b) \quad A_\varepsilon(t)^{-1} \rightarrow A_0(t)^{-1}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$(c) \quad dA_\varepsilon(t)^{-1}/dt \rightarrow dA_0(t)^{-1}/dt, \quad 0 \leq t \leq T$$

が成立するとする.

$$(i) \quad u_\varepsilon \rightarrow u_0,$$

$$(ii) \quad 0 \leq t \leq T \text{ で一様に } f_\varepsilon(t) \rightarrow f_0(t),$$

$$(iii) \quad t, \eta, \varepsilon \text{ に無関係な } K, \alpha > 0 \text{ が存在して } 0 \leq \eta \leq t \leq T \text{ で}$$

$$\|f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(\eta)\| \leq K(t-\eta)^\alpha$$

であり、初期条件 $u_\varepsilon(s) = u_\varepsilon$ を満足する $s \leq t \leq T$ での (1ε) の解 $u_\varepsilon(t; s)$

について次のことが成立する.

$$(17) \quad 0 \leq s \leq t \leq T \text{ で一様に } u_\varepsilon(t; s) \rightarrow u_0(t; s)$$

$0 \leq s < t \leq T$ で一様に

$$(18) \quad du_\varepsilon(t; s)/dt \rightarrow du_0(t; s)/dt$$

$$(19) \quad A_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t; s) \rightarrow A_0(t) u_0(t; s).$$

証明の主な部分は (1ε) の基本解 $U_\varepsilon(t, s)$ 及びその導関数 $\partial U_\varepsilon(t, s)/\partial t$ の収束を調べることにあり、ここでは次の予備定理を述べるにとどめる.

予備定理1. 定理2の仮定のもとで $0 \leq s \leq t \leq T$ で一様に強位相で

$$(20) \quad \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t)) \rightarrow \exp(-(t-s)A_0(t)).$$

証明 g を X の任意の元として証明の間中固定する. $\delta > 0$ とする.

$$\begin{aligned} & \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t))g - \exp(-(t-s)A_0(t))g \\ &= \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t)) \{ I - \exp(-\delta A_0(t)) \} g \\ (21) \quad & + \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t)) \{ \exp(-\delta A_0(t)) - \exp(-\delta A_\varepsilon(t)) \} g \end{aligned}$$

$$+ \{ \exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t)) - \exp(-(t-s+\delta)A_0(t)) \} g \\ + \exp(-(t-s)A_0(t)) \{ \exp(-\varepsilon A_0(t)) - I \} g$$

η を任意の正の数とする. (a) によって $\delta > 0$ が存在して $0 \leq t \leq T$ で

$$\sup \| \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t)) \| \| \{ I - \exp(-\varepsilon A_0(t)) \} g \| \leq \eta/4.$$

次に

$$\| \exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t)) - \exp(-(t-s+\delta)A_0(t)) \| \\ \leq C \int_{\lambda \in \Gamma, |\lambda| \leq N} e^{-\delta \operatorname{Re} \lambda} \| \{ A_\varepsilon(t)^{-1} - A_0(t)^{-1} \} A_0(t)(\lambda - A_0(t))^{-1} g \| |\lambda| \\ + C \int_{\lambda \in \Gamma, |\lambda| > N} e^{-\delta \operatorname{Re} \lambda} \{ \| (\lambda - A_\varepsilon(t))^{-1} g \| + \| (\lambda - A_0(t))^{-1} g \| \} |\lambda|$$

であるが N を充分大きくとると等号項は $< \eta/8$ となる. 次に

$\{ A_0(t)(\lambda - A_0(t))^{-1} g : |\lambda| \leq N, \lambda \in \Gamma, 0 \leq t \leq T \}$ は g のほかは N には関係する compact 集合であることに注意すると $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき等号項は 0 に収束する. 故に ε が充分小さければ

$$\| \{ \exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t)) - \exp(-(t-s+\delta)A_0(t)) \} g \| < \eta/8$$

となる. (21) の右辺等三項も同様に評価する (終).

§2. (2 ε) の退化

定理 3. 定理 1 の仮定が $A_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$, $\varepsilon > 0$ によって一様に満たされておけるとする. 又 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき強位相で一様に $A_\varepsilon(t)^{-1} \rightarrow A_0(t)^{-1}$ とする. さらに $\{ u_\varepsilon(s) \}$ を X の元の列として

$$(i) \quad 0 \leq s \leq T \text{ で一様に } u_\varepsilon(s) \rightarrow A_0(s)^{-1} f_0(s),$$

$$(ii) \quad 0 \leq t \leq T \text{ で一様に } f_\varepsilon(t) \rightarrow f_0(t),$$

$$(iii) \quad \| f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(s) \| \leq K(t-s)^\alpha, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \text{ 但し } K, \alpha \text{ は } \varepsilon,$$

ε, ρ は無関係な定数,

とすると初期条件 $u_\varepsilon(t, s) = u_\varepsilon(s)$ を満足する (2ε) の解 $u_\varepsilon(t, s)$ に関して次のことが成立する.

$$(22) \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad \text{で一様に} \quad u_\varepsilon(t, s) \rightarrow u_0(t),$$

$$(23) \quad 0 \leq s < t \leq T \quad \text{で任意一様に} \quad A_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t, s) \rightarrow A_0(t) u(t).$$

証明の概略 $\tilde{A}_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} A_\varepsilon(t)$ とおくと定理 1 の仮定が $N \in \varepsilon^{1-p} N$ でおかえて, θ_0, M, ρ は ε 4 ままで満足される. 従って

$$(24) \quad du(t) + \tilde{A}_\varepsilon(t) u(t) = 0$$

の基本解

$$(25) \quad \tilde{U}_\varepsilon(t, s) = \exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) + \tilde{W}_\varepsilon(t, s)$$

が構成される.

$$(26) \quad \|\tilde{W}_\varepsilon(t, s)\| \leq C \varepsilon^{1-p} (t-s)^\rho,$$

$$(27) \quad \|\tilde{A}_\varepsilon(t) \tilde{W}_\varepsilon(t, s)\| \leq C \varepsilon^{1-p} (t-s)^\rho$$

は容易にわかる. $u_\varepsilon(t, s)$ はこの基本解を使って

$$(28) \quad u_\varepsilon(t, s) = \tilde{U}_\varepsilon(t, s) u_\varepsilon(s) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{U}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

と表わされる. (27) と

$$\varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma = A_\varepsilon(t)^{-1} \int_s^t \tilde{A}_\varepsilon(t) \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

とによって $0 \leq s \leq t \leq T$ で一様に

$$\tilde{W}_\varepsilon(t, s) u_\varepsilon(s) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow 0$$

であることは容易にわかる. 次に

$$\begin{aligned} & \exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) u_\varepsilon(t) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \exp(-(t-\sigma)\tilde{A}_\varepsilon(t)) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma \\ &= A_\varepsilon(t)^{-1} f_\varepsilon(t) + \exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) (u_\varepsilon(s) - A_\varepsilon(t)^{-1} f_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon^{-1} \int_s^t \exp(-(t-\sigma)) \tilde{A}_\varepsilon(t) (f_\varepsilon(\sigma) - f_\varepsilon(t)) d\sigma$$

と命題して見れば左辺が $0 \leq s \leq t \leq T$ で一様に $A_\varepsilon(t)^{-1} f_\varepsilon(t)$ に収束する。

とは容易にわかる。

§ 3. 例

前の二つの節で述べたことが成立する一つの例を考える。 $-\infty < a < 0$

$< T < b < \infty$ として $X = L^2(a, b)$ とする。 $L^2(a, b)$ の中で境界条件

$u(a) = u(b) = 0$ を満足する関数のあるクラスで定義された微分作用素

$$(29) \quad (A_\varepsilon(t)u)(x) = -\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\varepsilon}{x-t} \frac{du}{dx} + \frac{u}{(x-t)^2}$$

を考える。 $A_\varepsilon(t)$ の厳密な定義の一つは

$$(30) \quad V(t) = \left\{ u \in L^2(a, b) : \frac{du}{dx}, \frac{u}{x-t} \in L^2(a, b), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

として $V(t) \times V(t)$ で定義された双一次型式

$$(31) \quad a_\varepsilon(t; u, v) = \int_a^b \left\{ \varepsilon \frac{du}{dx} \frac{\overline{dv}}{dx} + \varepsilon \frac{du}{dx} \frac{\overline{v}}{x-t} + \frac{u \overline{v}}{(x-t)^2} \right\} dx$$

によって

$$(32) \quad \text{すべて } u \in V(t) \text{ に対して } a_\varepsilon(t; u, v) = (f, v) \text{ であるとき}$$

$$u \in D(A_\varepsilon(t)) \quad \text{かつ} \quad A_\varepsilon(t)u = f$$

と仮定されるが他方 $A_\varepsilon(t)u = f$ の解を具体的に表わすことも出来る ([5]).

この $A_\varepsilon(t)$ に対して定理 1 の仮定が ε に関して一様に $p = 1/2$ として満

たれる ([5]). その際 [3] の 245 頁にある不等式 (9.9.8), (9.9.9) は双一

次型式に関する結果 ([1], [2]) が重要である。次に $f \in C^M(a, b)$ であ

ば $A_\varepsilon(t)^{-1}f$ の具体的な表現の式の積分で部分積分を行なって一様に

$$(33) \quad A_\varepsilon(t)^{-1}f \rightarrow A_0(t)^{-1}f, \quad \alpha A_\varepsilon(t)^{-1}f/dt \rightarrow \alpha A_0(t)^{-1}f/dt$$

であることがいれるが $C_0^\infty(a, b)$ が $L^2(a, b)$ で稠密であることを用いれば

(33) は任意の $f \in L^2(a, b)$ に対しても成立することから、最後に定理

2 の (a) については $f \in L^2(a, b)$ に対して

$$f_n(t) = (I + n^{-1}A_0(t))^{-1}f$$

とすると $n \rightarrow \infty$ のとき $0 \leq t \leq T$ で一様に $f_n(t) \rightarrow f$ であることを注意す

れば容易に確かめられる。

§4. 加藤教授の結果

加藤敏夫先生は 12 月 3 日の Washington, D.C. での会合で次の結果を発表された。

定理 4. $\varepsilon > 0$ のとき (I_ε) の基本解が存在して

$$\|U_\varepsilon(t, s)\| \leq M < \infty, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \varepsilon > 0.$$

$u_0(t)$ は初期条件 $u_0(0) = \phi_0$ を満足する

$$du_0(t)/dt + A_0(t)u_0(t) = f_0(t)$$

の解で $A_0(t)u_0(t)$ は t について $[0, T]$ で連続微分可能, $A_\varepsilon(t)^{-1}$, $\alpha A_\varepsilon(t)^{-1}/dt$ は一様有界で $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき強位相で

$$A_\varepsilon(t)^{-1} \rightarrow A_0(t)^{-1}, \quad \alpha A_\varepsilon(t)^{-1}/dt \rightarrow \alpha A_0(t)^{-1}/dt$$

また $f_\varepsilon(t)$ も一様有界で $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$f_\varepsilon(t) \rightarrow f_0(t), \quad \phi_\varepsilon \rightarrow \phi_0$$

とすると初期条件 $u_\varepsilon(0) = \phi_\varepsilon$ を満足する (I_ε) の解 $u_\varepsilon(t)$ は t に関して一様に $u_0(t)$ に収束する。

注意. この定理で (1₀) の可解性は仮定されておらず、又方程式系 (1_ε) は双曲型、放物型等の制限はない。

証明の概略 $v_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)^{-1} A_0(t) u_\varepsilon(t)$ とおくと

$$d v_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t) v_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) + g_\varepsilon(t)$$

$$\text{但し } g_\varepsilon(t) = (d/dt) \{ (A_\varepsilon(t)^{-1} - A_0(t)^{-1}) A_0(t) u_0(t) \}.$$

$g_\varepsilon(t)$ は一様有界で $g_\varepsilon(t) \rightarrow 0$, 又 $v_\varepsilon(0) = A_\varepsilon(0)^{-1} A_0(0) \phi_0 \rightarrow \phi_0$ から一様に $v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) \rightarrow 0$. 他方 $A_\varepsilon(t)^{-1} \rightarrow A_0(t)^{-1}$ により $v_\varepsilon(t) \rightarrow u_0(t)$.
従って $u_\varepsilon(t) \rightrightarrows u_0(t)$ (一致)

この定理の要旨は $A_0(t) u_0(t)$ が微分可能という仮定にある、(1₀) が可解であることは仮定しないが、もしその基本解 $U_0(t, s)$ が存在し、さらに $U_0(t, s) \phi$ が s について $s \leq t \leq T$ で二回連続微分可能である様な ϕ が稠密に存在すれば上の結果を用いて $U_\varepsilon(t, s) \rightarrow U_0(t, s)$ が得られる。

注意. 上の定理で $A_0(t) u_0(t)$ が微分可能としたが実は $A_0(t) u_0(t)$ 及びその経路微分が $[0, T]$ で絶対可積分ならば十分である。

[1] T. Kato: Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 246-274.

[2] T. Kato: A generalization of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 305-308.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, 1959.

- [4] M. Nagumo: Perturbation and degeneration of evolutionary equations in Banach space, Osaka Math. J., 15(1963), 1-10.
- [5] H. Tanabe: Note on singular perturbation for abstract differential equations, Osaka J. Math. 1 (1964), 239-252.